

ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕННАЯ ОЦЕНКА. ПРЕСЛОВУТЫЙ МНОГОМЕРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ.

*СЛУЦКИЙ А.А., к.т.н.,
Сопредседатель Межрегионального
Сообщества Экспертов и Оценщиков*

Введение

Метод регрессионного анализа прямо упомянут в качестве общепринятого метода оценки недвижимости сравнительного подхода в п. 22д) Федерального стандарта оценки «Оценка недвижимости (ФСО № 7).

Тем не менее, анализ практики применения этого метода показывает, что на сегодняшний день как на уровне методологии, так и на уровне применения отсутствует понимание требований к методу и его принципиальных ограничения, часть из которых обусловлена спецификой оценки, как таковой, и оценки недвижимости, в частности.

Следствием этого являются

- с одной стороны – явно завышенные ожидания относительно доказательственного характера метода, в том числе и со стороны банковских специалистов;
- с другой стороны – явно недостоверные результаты оценки, которые маскируются псевдонаучными обсуждениями достоинств и объективности метода, которые в реальности не имеют никакого отношения к реальности.

В данной статье автор обращает внимание на те стороны метода регрессионного анализа, которые по неясным ему причинам либо замалчиваются, либо попросту игнорируются (в том числе и демонстративно).

Особо укажем, что под регрессионным анализом мы здесь понимаем именно многомерный регрессионный анализ с числом предикторов модели 2 и более. Одномерный регрессионный анализ мы таковым не считаем, поскольку это процесс полностью описывается в терминах корреляции и аппроксимации.

Отметим также, что всё сказанное далее относится ко всем версиям регрессионного анализа, включая «регрессию цена – качество».

Оценка индивидуальная / рыночная и массовая / налоговая – принципиально разные виды деятельности

Рассматриваемая здесь тема имеет под собой основание в виде фундаментального различия индивидуальной / рыночной и массовой / налоговой оценок, как двух различных видов деятельности, объединение которых на основании слова «оценка» является вводящим в заблуждение. Это утверждение поясняется в Табл. 1.

Как следует из Табл. 1, углублённое рассмотрение индивидуальной / рыночной и массовой / налоговой оценок указывает на их принципиальное различие, пренебрежение которым чревато искажениями смысла прежде всего индивидуальной / рыночной оценки. При этом взаимопроникновение прежде всего методов оценки между указанными видами деятельности (особенно методов индивидуальной оценки в массовую) может быть как необходимо, так и обоснованно в определённых случаях.

Таблица 1. Сопоставление индивидуальной / рыночной и массовой / налоговой оценок как двух разных видов деятельности.

	Оценка	
	Индивидуальная / Рыночная	Массовая / Налоговая
Объект оценки	Занимает центральное и определяющее место в процессе	Отсутствует как таковой. Оцениваются сразу все объекты данного назначения / использования на региональном рынке
Контекст процесса оценки	Строго объекта оценки	Всех объектов данного назначения / использования на региональном рынке
Область исследования	Минимально необходимая область рынка вокруг объекта оценки	Весь региональный рынок объектов данного назначения / использования (возможно, менее)
Методы оценки	Методы трёх традиционных подходов – сравнительного, доходного, затратного.	• Регрессионный анализ, включая гедонический. • Искусственные нейронные сети. • Пространственный анализ. • Другие.
Объём требуемых данных	Не более или немного более минимально достаточного	Как можно больше, но не менее минимально достаточного

Регрессионный анализ в мировой практике индивидуальной рыночной оценки

В США регрессионный анализ не является общепринятым методом индивидуальной оценки, однако может использоваться для массовой оценки в соответствии с USPAP. Тем не менее, отдельные статьи с попытками применения регрессионного анализа в индивидуальной оценке изредка (не каждый год) публикуются в Журнале оценки (Appraisal Journal) и иных журналах, посвящённых проблемам недвижимости, причём заслуживают самого внимательного отношения, поскольку в них полностью профессионально и честно излагаются плюсы, минусы, пределы и ограничения метода (см., в частности, ¹ и др.).

Кроме того, необходимо отметить также, что в судебной системе США регрессионный анализ давно является принятым методом доказывания.

¹ Isakson H.R. (2001), Using Multiple Regression Analysis in Real Estate Appraisal, Appraisal Journal, Oct 1, <https://www.thefreelibrary.com/Using+Multiple+Regression+Analysis+in+Real+Estate+Appraisal.-a080195045>. Benjamin J.D., Guttery R.S., Sirmans C.F. (2004), Mass Appraisal: An Introduction to Multiple Regression Analysis for Real Estate Valuation, Journal of Real Estate Practice and Education 7 (1), Jan., https://www.researchgate.net/publication/228609581_Mass_Appraisal_An_Introduction_to_Multiple_Regression_Analysis_for_Real_Estate_Valuation. Dell G. (2017), Regression, critical thinking, and the valuation problem today, Appraisal Journal, Jun 22, <https://www.thefreelibrary.com/Regression%2c+critical+thinking%2c+and+the+valuation+problem+today.-a0509321675>. Trimble M.C. (2023), Regression Promises and Aggregation Bias Illusions. The Application of Market Delineation to Land Valuation Models, Appraisal Journal, Sept. 22, <https://www.thefreelibrary.com/Regression+Promises+and+Aggregation+Bias+Illusions%3a+The+Application...-a0790824472>

Однако, его применение принято и распространено, в частности, в процессах о дискриминации по полу, возрасту, расе. Как указывает Рабинфельд в своём руководстве по применению регрессионного анализа в судебной системе США ²: «Случаев описания дискриминации с использованием многомерного регрессионного анализа великое множество».

При этом применение метода для решения вопросов стоимости сводится не более чем к единичным случаям за всю историю.

Стандарты TEGOVA (EVS), RICS (Red Book) и IVSC (IVS) также не содержат регрессионный анализ в качестве общепринятого, стандартизированного метода оценки.

При этом в официальных публикациях TEGOVA, включая официальный журнал Европейский оценщик (European Valuer Journal) выражается полностью открытое неприятие регрессионного анализа в индивидуальной рыночной оценке. В частности, Маевска высказывается полностью определённо ³:

Некоторые оценщики пытаются использовать регрессионные модели для целей оценки, но часто на практике такие оценки на самом деле основаны не на регрессионной модели, а на том, что регрессионная модель используется для обоснования интуиции оценщика.

Адаптируя различные регрессионные модели, используя методы проб и ошибок, а также отбрасывая некоторые данные о транзакциях или изменяя анализируемые характеристики, оценщики могут получить модель, которая даст заранее определенный результат.

Такой подход не является надежным и не отличается высоким качеством и может рассматриваться как манипуляция.

В США примерно на это же, употребляя термин «мусорная наука», указывает Делл в статье «Регрессия, критическое мышление и текущая проблема оценки» ⁴:

Ошибки в регрессионном анализе, как правило, возникают из-за ошибок моделирования, а не из-за ошибок в вычислениях. ⁵

Эти ошибки моделирования могут включать в себя постановку неправильного вопроса, выбор неоптимального набора данных, применение неправильного алгоритма и сообщение о сомнительной интерпретации.

Как отмечается в четырнадцатом издании The Appraisal of Real Estate, статистические методы являются мощными инструментами для обобщения и описания данных, получения выводов о параметрах и построения прогнозных

² Rubinfeld D.L. (2011), Reference Guide on Multiple Regression, In Reference Manual on Scientific Evidence: Third Edition, National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, Washington, DC: The National Academies Press, <https://nap.nationalacademies.org/read/13163/chapter/8#306>

³ Majewska B. (2017), Why regression analysis is not best valuation practice, European Valuer, Jul., Is. № 8, <https://tegova.org/static/cf80035f9c25f49a78a54bfc7c7674f2/European%20Valuer%20-%20July%202017%20-%20Issue%20n%208.pdf>

⁴ Dell G. (2017), Regression, critical thinking, and the valuation problem today, Appraisal Journal, Jun 22, <https://www.thefreelibrary.com/Regression%2C+critical+thinking%2C+and+the+valuation+problem+to+day.-a0509321675>

⁵ Электронные таблицы в свое время принесли большой прогресс. ... Электронные таблицы, как правило, приводят к ряду ошибок моделирования, поскольку действия и вычисления по умолчанию часто не указывают на подходящую модель - например, предполагается, что необходимы выборочные статистические вычисления, когда проблема не требует статистического вывода.

моделей. Однако статистические методы могут использоваться не по назначению. Злоупотребление статистическими методами может происходить либо по незнанию, либо в целях преднамеренного введения в заблуждение.

Злоупотребление может быть связано с самообманом и принятием желаемого за действительное. Принятие желаемого за действительное коренится в неверии в то, что достаточно здравого смысла и что требуются статистические тесты, основанные на случайных выборках.

И далее в сноске

Неправильно применяемые методы логической статистики всегда выдают себя с помощью F-критериев, нулевых гипотез, хи-квадратов и доверительных интервалов, поскольку аналитик пренебрегает идентификацией или составлением списка исследуемой совокупности и уклоняется от проверки подлинности необходимой модели случайной выборки.

Наихудший случай - это когда аналитик субъективно выбирает данные из воображаемой совокупности, а затем использует статистические тесты, чтобы доказать, насколько хорошо исследование. В этом суть большей части «мусорной науки».

Автор данной статьи выражает полное согласие со сказанным. Более того, некритичное и неграмотное применение регрессионного анализа в российской оценке наряду с разного рода «справочниками» и «сборниками» корректировок и иных псевдорыночных данных активно способствует её дискредитации.

В итоге можно сделать очевидный вывод о том, что формальное наличие метода регрессионного анализа в ФСО 7 в качестве общепринятого необходимо рассматривать как отклонение от принятой мировой практики оценки и как искусственное внедрение в целом хорошо проверенного инструмента массовой, налоговой оценки в оценку индивидуальную, рыночную. Это утверждение будет достаточно детально обосновано далее.

Условия Гаусса - Маркова

Здесь мы только заострим внимание на этом вопросе, поскольку в целом ряде случаев соответствие данных фактически используемых в практике российской оценки регрессионным анализом на соответствие условиям Гаусса – Маркова не проверяется. Более того, автору приходилось слышать заявления о том, что, дескать, выполнение этих условий обеспечивается «автоматически» применением метода наименьших корректировок. Это категорически не так.

Теорема Гаусса – Маркова утверждает, что если

1. модель правильно специфицирована (включает в себя все существенные факторы и не включает несущественные факторы);
2. между предикторами (факторами) модели не существует линейной связи;
3. ошибки модели имеют нулевое математическое ожидание;
4. дисперсии ошибок одинаковы;
5. ошибки не коррелируют между собой;

оценки метода наименьших квадратов являются лучшими в классе линейных несмещённых оценок (Best Linear Unbiased Estimators, BLUE). При рассмотрении данной темы следует изучить статью д.э.н., проф. С.А. Смоляка ⁶, в которой изложены допущения и ограничения метода.

Прежде всего необходимо отметить, что регрессионный анализ становится таковым только в случае подтверждения соответствия данных и результата условиям Гаусса – Маркова (которые разобраны в упомянутой статье С.А. Смоляка), что, собственно, и представляет собой регрессионный анализ в отличие от имеющего место представления о том, что регрессионный анализ – это просто некая модель, полученная с помощью стандартных возможностей MS Excel.

Кроме того, «подводные камни» регрессионного анализа в оценке недвижимости ранее отлично были описаны в статье Изаксона ⁷.

Без проверки соответствия использованных в регрессионном анализе данных и полученной модели условиям Гаусса - Маркова говорить о регрессионном анализе категорически нельзя (именно это в мягкой форме говорится в американской «Оценке недвижимости» ⁸).

Как результат, оценки методом регрессионного анализа, в которых игнорируется проверка соответствия условиям Гаусса – Маркова, вообще не следует считать оценками, соответствующими требованиям законодательства.

Проверка ошибок аппроксимации на нормальность в оценке нужна обязательно!

Надо сделать ещё одно разъяснение, которое нам представляется очень важным. В некоторых текстах по регрессионному анализу можно встретить утверждение о том, что регрессионный анализ не требует проверки ошибок аппроксимации на нормальность.

Напротив, в ⁹ проверка ошибок на нормальность распределения предписывается (или, как минимум, настоятельно рекомендуется) американским оценщикам в качестве обязательной при использовании регрессионного анализа.

Можно также встретить промежуточное утверждение, что такое требование есть, но оно

... не является обязательным. Если мы соответствуем этому предположению, мы имеем информацию о том, как распределяются параметры регрессии, что позволяет сделать однозначные выводы об их значимости. Если мы не сможем выполнить это предположение, регрессионная модель все равно

⁶ Смоляк С.А. (2022), Допущения при использовании статистических моделей в стоимостной оценке, Имущественные отношения в РФ, №7(250)

⁷ Isakson H.R. (2001), Using Multiple Regression Analysis in Real Estate Appraisal, Appraisal Journal, October 1, <https://www.thefreelibrary.com/Using+Multiple+Regression+Analysis+in+Real+Estate+Appraisal.-a080195045>

⁸ Appraisal Institute (2020), The Appraisal of Real Estate, 15th Edition. Appraisal Institute, Chicago, IL

⁹ Appraisal Institute (2020), The Appraisal of Real Estate – цит. соч., Appendix B. Regression Analysis and Statistical Applications, https://www.appraisalinstitute.org/assets/1/7/ARE_15_Appendix_B.pdf

будет точной, но определить значимость параметров регрессии будет трудно
¹⁰

или

*Нормальность остатков требуется только для проверки правильности гипотезы о том, что р-значения для t-тестов и F-тестов будут действительными*¹¹.

Однако, надо принципиально уточнить, что проверки на нормальность не требует не собственно регрессионный анализ, а именно метод наименьших квадратов, лежащий в его основе¹². А отсутствие возможности провести указанные выше t - и F - тесты будет означать, что в реальности результат не получен в процессе обработки данных именно статистическими методами, поскольку не осуществлена проверка на соответствие объёма использованных данных требованиям к статистической значимости. Соответственно, такой результат не будет являться значимым со статистической точки зрения, т.е. не будет иметь статистического обоснования.

Ссылаясь на математическое определение, данное в¹³, Изаксон в упомянутой выше статье именует это «многомерным нормальным распределением»:

Фундаментальное предположение, лежащее в основе всех многомерных регрессионных анализов, состоит в том, что данные, используемые для построения регрессионной модели, образуют многомерное нормальное распределение. Когда результаты многомерного регрессионного анализа нечувствительны к незначительным отклонениям от предположения о многомерной нормальности, результаты считаются надежными.

С точки зрения специфики оценки стоимости отсутствие контроля нормальности будет означать именно то, о чём пишет Маевская в цитате выше – имеются признаки манипуляции моделью и методом, поскольку в модель могут быть искусственно включены факторы (предикторы) не имеющие никакого отношения к решаемой задаче, но позволяющие обеспечить требуемый результат. На это же указывает Делл (см. выше).

Кроме того, категорически нарушаются логические принципы сравнения по аналогии, лежащие в основе сравнительного подхода к оценке – аналогия категорически не может быть основана на несущественных признаках сходства и

¹⁰ Sarstedt M., Mooi, E. (2014), Regression Analysis, In: A Concise Guide to Market Research, Springer Texts in Business and Economics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, https://www.researchgate.net/publication/300403700_Regression_Analysis

¹¹ Institute for Digital Research & Education (UCLA), Regression with STATA Chapter 2 – Regression Diagnostics, <https://stats.idre.ucla.edu/stata/webbooks/reg/chapter2/stata-webbooksregressionwith-statachapter-2-regression-diagnostics/?fbclid=IwAR0HZNQRSW9y9ixNrXEZ3FI-sURvLnOaVj9uie-6tzM3IB9zygDRFIVHR5I#:~:text=In%20this%20section%2C%20we%20will,stands%20for%20variance%20inflation%20factor.&text=Tolerance%2C%20defined%20as%201%2FVIF,on%20the%20degree%20of%20collinearity>

¹² Кроме того, метод наименьших квадратов полностью работоспособен и при отсутствии гомоскедастичности данных, при которой регрессионный анализ считается, как минимум, не качественным.

¹³ Theil H. (1971), Principles of Econometrics, New York: John Wiley & Sons, Inc.

различия, поскольку в этом случае она даёт априори недостоверный и даже ложный результат.

О статистической значимости мы будем говорить далее, а здесь отметим, что требование нормальности остатков накладывает первое существенное ограничение на количество наблюдений, требуемых для полноценного регрессионного анализа. требования к использованию нормального распределения определены в ГОСТ Р 8.736 – 2011 «Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения», в соответствии с которым говорить о нормальности распределения можно только начиная с 16 наблюдений, причём обусловлено это не нормативно – волюнтаристски, а полностью научно следствиями из центральной предельной теоремы. В соответствии с ¹⁴

Центральная предельная теорема (central limit theorem).

Статистический принцип, который определяет тенденцию к тому, что распределение среднего значения по выборке становится приблизительно нормальным по мере увеличения размера выборки, независимо от формы распределения нижележащей совокупности.

При выборке из несимметричной совокупности размер выборки должен составлять не менее 30 ¹⁵, чтобы обеспечить приблизительную нормальность распределения среднего по выборке.

При выборке из симметричной совокупности требуется провести 15 выборочных наблюдений.

При выборке из нормального распределения генеральной совокупности среднее значение выборки обычно распределяется независимо от размера выборки.

Таким образом, предположение о нормальности распределения генеральной совокупности считается полностью нереальным. Тем не менее, на практике 16 наблюдений вряд ли будут являться минимально необходимым количеством для регрессионного анализа, поскольку обеспечение обязательной статистической значимости отдельных коэффициентов модели может требовать использования намного бóльшего числа наблюдений (десятки, сотни и более), **о чём речь пойдёт далее**

Спецификация модели. Свободный член регрессионных моделей как систематическая ошибка.

Одной из основных проблем применения регрессионного анализа является правильная спецификация модели. Однако, зачастую это ограничивается выбором функционального вида модели – аддитивная, мультипликативная, смешанная и др. При этом, умышленно или по незнанию, упускается вопрос о том, можно ли использовать модель со свободным членом, который в том или ином виде может присутствовать в модели любого функционального вида, или это является недопустимым по принципиальным соображениям ¹⁶.

¹⁴ Appraisal Institute (2022), The Dictionary of Real Estate Appraisal, Seventh Edition, Chicago, IL

¹⁵ Отметим, что в упомянутом ГОСТ Р 8.736 – 2011 применительно к данному случаю содержится требование не к 30, а к 50 наблюдениям.

¹⁶ Несмотря на то, что такая постановка вопроса может вызвать улыбку у «умудрённого пользователя» (дескать, ерунда, конечно же можно), автор за много лет не смог получить ответ на

Для иллюстрации используем наиболее простой функциональный вид модели регрессионного анализа – аддитивный – со следующим уравнением (ограничиваемся тремя предикторами).

$$PC = a_0 + a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + a_3 \times x_3 + e, \quad (1)$$

где

PC – рыночная стоимость;

a_0 – свободный член;

$a_1 \dots a_3$ – коэффициенты регрессионной модели;

$x_1 \dots x_3$ – предикторы (факторы) регрессионной модели;

e – случайная ошибка, распределённая нормально со средним значением, в идеале равным нулю, а в реальности несколько отличающимся от нуля в пределах норматива (не более 15% от PC).

Соответственно, аддитивная модель без свободного члена отличается от (1) только отсутствием свободного члена a_0 :

$$PC = a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + a_3 \times x_3 + e, \quad (2)$$

Известно, что модели со свободным членом с практической точки зрения существенно более просто реализуемы по математическим аппаратным причинам, чем по всей видимости и объясняется стремление к их безосновательному использованию. Однако, такая «простота хуже воровства», поскольку каждый член регрессионной модели обязан иметь полностью прозрачное объяснение (очевидный смысл).

Между тем, если в отношении используемых факторов (предикторов) модели это в целом выполняется, хотя и требует специальных пояснений, то в отношении свободного члена модели это может быть совсем не так.

Например, при упомянутых выше исследованиях дискриминации в судах США в моделях где зависимой переменной является величина заработной платы, а возраст, пол, раса являются предикторами, свободный член модели имеет ясное обоснование в виде некоей «базовой» рыночной (скорее всего – минимальной) заработной платы, не зависящей ни от каких факторов, включая дискриминационные.

А вот применительно к оценке рыночной стоимости никакой «базовой» рыночной стоимости быть не может и свободный член в (1) вне зависимости от его знака и величины никакого объяснения (смысла) иметь в принципе не может¹⁷. При этом в таких условиях единственным смыслом свободного члена в (1) является то, что он представляет собой не что иное, как систематическую, не случайную, постоянную ошибку (смещение) модели.

В самом деле, (1) можно переписать в виде

$$PC^* = PC - a_0 = a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + a_3 \times x_3 + e, \quad (3)$$

вопрос «Что означает свободный член в уравнении (1), если он имеет рублёвую размерность? За что необходимо платить деньги при равенстве нулю всех предикторов модели (фактическом отсутствии объекта оценки)?» от самых авторитетных специалистов. Вернее, ответы были и есть, но на вопросы они не отвечают.

¹⁷ Но может иметь смысл при оценке с использованием иных зависимых переменных, например, при рассмотрении корреляционно – аппроксимационной модели обобщённого модифицированного метода выделения как регрессионной.

чтобы показать смещённость оценки РС на величину a_0 . При этом очевидно то, что в реальности оценена не РС, а $PC^* = PC - a_0$.

С другой стороны, можно говорить о том, что наличие a_0 увеличивает смещение случайной ошибки

$$PC = a_1 \times x_1 + a_2 \times x_2 + a_3 \times x_3 + (a_0 + e), \quad (4)$$

При таком рассмотрении смещение среднего значения случайной ошибки от нуля в идеале появится, в иных случаях – увеличится и вполне вероятно может выйти за нормативные пределы, что практически полностью или полностью обнулит усилия по построению модели – попытка оценки попросту провалилась, и усилия были напрасны.

Проводя аналогию с методом количественных корректировок сравнительного подхода и доводя вопрос до абсурда, можно вообразить реакцию потребителя отчёта на то, когда он видит, что в оценке методом количественных корректировок после согласования скорректированных цен объектов – аналогов к итоговому результату просто добавляется некоторая величина, именуемая «свободным членом модели оценки», а такое действие не имеет никаких объяснений. Тем не менее, в регрессионном анализе такое без каких бы то ни было объяснений считается нормой.

Дополнительно необходимо отметить, что с высокой вероятностью при использовании одного и того же набора данных и одних и тех же предикторов перестроить модель со свободным членом, обладающую всеми формальными признаками достоверности, кроме свободного члена, в модель без свободного члена (2) не получится. Хотя автору не известны исследования на эту тему, наиболее вероятным объяснением этого являются неверный набор использованных предикторов и проблема пропущенной переменной.

Статистическая значимость модели и отдельных коэффициентов модели.

Сарстедт и Муи ¹⁸ выделяют два подхода к определению минимального числа наблюдений, которые необходимо использовать для получения достоверного результата регрессионного анализа:

1. Формальный подход на основе анализа мощности или/и точности. При этом, как указывают авторы «эти расчёты сложны», что, в целом, соответствует действительности для начального уровня компетентности и требует специфических знаний и умений, а также ресурса времени. Однако, эти расчёты могут быть автоматизированы.
2. Подход на основании эмпирических правил, который, очевидно, проще, но не имеет строгой научной основы. Тем не менее, эмпирические правила очень полезны на самом начальном этапе планирования анализа для оценки принципиальной возможности его качественного осуществления и получения достоверного результата.

¹⁸ Sarstedt M., Mooi, E. (2014), Regression Analysis – цит. соч.

Первый подход рассматривают Келли и Максвелл ¹⁹, которые указывают, что в контексте многомерной регрессии к размеру выборки можно подходить по крайней мере на двух уровнях, а также с двух различных точек зрения – мощности выборки соответственно для модели в целом и для каждого предиктора и точности определения значений, а также точности определения зависимой переменной и точности определения каждого предиктора ²⁰. Обобщение этих четырёх возможных вариантов решения вопроса представлено в Табл. 2.

Таблица 2. Четыре варианта решения вопроса о достаточности объёма выборки для получения достоверного результата регрессионного анализа.

Точка зрения	Уровень	
	Модели в целом	Каждого отдельного предиктора
Мощность (объём) выборки	1. Достаточность объёма выборки для статистической значимости модели в целом показывается на основании анализа коэффициента корреляции модели в целом и F – критерия Фишера. Требуется предварительная проверка остатков модели на нормальность.	2. Достаточность объёма выборки для статистической значимости каждого отдельного предиктора показывается на основании коэффициента частной корреляции по каждому предиктору и t – критерия Стьюдента (более мягкий) или F – критерия Фишера (более жёсткий). Требуется предварительная проверка остатков модели по каждому предиктору на нормальность.
Точность определения	3. Задаётся точность модели в целом в виде величины доверительного интервала, а затем из формулы доверительного интервала определяется минимально необходимое количество наблюдений. Требуется предварительная проверка остатков модели на нормальность, поскольку в расчётах используется статистика Стьюдента.	4. Задаётся точность определения каждого предиктора в виде величины доверительного интервала, а затем из формулы доверительного интервала определяется минимально необходимое количество наблюдений. Требуется предварительная проверка остатков модели на нормальность, поскольку в расчётах используется статистика Стьюдента.

Относительно точностной точки зрения – варианты 3 и 4 в Табл. 2 - в оценке можно утверждать, что она не применима, поскольку в формулу доверительного интервала для бесповторной выборки входят параметры объёма генеральной совокупности и среднеквадратического отклонения по генеральной совокупности, которые в

¹⁹ Kelley K., Maxwell S.E. (2003), Sample Size for Multiple Regression: Obtaining Regression Coefficients That Are Accurate, Not Simply Significant, Psychological Methods, Vol. 8, No. 3, https://www3.nd.edu/~kkelley/publications/articles/Kelley_Maxwell_2003.pdf

²⁰ Более того, Келли и Максвелл предлагают совместить точки зрения точности и мощности для обеспечения большей достоверности результата тестирования. Но о практическом применении такого супержёсткого подхода автору данной статьи ничего не известно.

оценке, как правило, не известны и их можно определить только оценочно, предположительно, т.е. проблематически ²¹.

Напротив, мощностная точка зрения в оценке применима и применяется.

При этом более простой уровень анализа – на уровне модели в целом – для целей оценки в принципе не подходит во избежание злоупотреблений, связанных со включением в модель статистически незначимых параметров с целью обеспечения заранее необходимого результата оценки. Таким образом, в оценке должны быть статистически значимыми как сама модель, так и каждый предиктор (фактор) этой модели. Возвращаясь к ранее сказанному про свободный член регрессионной модели в этом контексте, укажем то, что его значимость показать невозможно.

Если обратиться к альтернативному подходу – эмпирических правил, то необходимо иметь в виду то, что они взяты не из воздуха, а являются обобщением опыта авторов решения конкретных практических задач, в ходе которого авторам удалось показать статистическую значимость результатов с помощью формального подхода. Опыт автора данной статьи по применению формального подхода приводит к аналогичному выводу. Однако, в силу разнообразия задач, которые решались авторами эмпирических правил и ситуаций исследования (которые обобщаются в величинах коэффициентов корреляции модели в целом и частных корреляций по отдельным предикторам модели), интервалы, которые дают эмпирические правила, очень широки.

В Табл. 3 представлен обзор эмпирических правил для минимально необходимого числа наблюдений для регрессионного анализа в статистической и оценочной литературе (статьи и монографии).

Как видно из Табл. 3, на практике используются три вида эмпирических критериев минимально необходимого числа наблюдений для проведения регрессионного анализа:

1. Абсолютный критерий - $n \geq N$, где N определяется в очень широких пределах – 30 (Эппли) ... 200 (Маркс), в силу чего его надо рассматривать только в самом первом приближении.
2. Критерий в виде суммы (критерий суммы), который в обобщённом виде можно записать как $n \geq A + B \times m$, где $A = 50 \dots 100$, $B \geq 1$ (1, 2, 3, ... 8);
3. Критерий в виде отношения, который можно записать как $n : m = C : 1$, где $C = 5 \dots 10 \dots 15 \dots 30$. При этом $C = 5$ – самый минимум, начиная с которого можно пробовать осуществить регрессионный анализ, а $C = 30$ используется в случае необходимости исследования влияния слабых факторов (ожидаемый R^2 равен 0,10 или меньше).

Как указывает Харрис (см. Табл. 3), критерий суммы лучше подходит для малого количества (5 и менее) факторов модели, в ином случае лучше использовать критерий отношения. Очевидно, что в первом случае предполагается то, что исследователь в ходе предварительного анализа выбрал наиболее существенные факторы, а во втором случае в процессе исследования имеет место элемент угадывания.

Таблица 3. Обзор эмпирических правил для минимально необходимого числа наблюдений для регрессионного анализа в статистической и оценочной литературе (n – минимально необходимое число наблюдений, m – количество факторов (предикторов) модели)

²¹ Слуцкий А.А. (2024), Доказательственная оценка. Термины и инструменты статистики, Вопросы оценки, №1

Автор(ы)	Эмпирическое правило	Ссылка
Статистическая литература		
Маркс (Marks, 1966)	$n \geq 200$	22
Шмидт (Schmidt, 1971)	$n : m = \text{от } 15 : 1 \text{ до } 25 : 1$	23
Харрис (Harris, 1985)	$n \geq 50 + m$ (для $m \leq 5$) $n : m = 10 : 1$ (для $m \geq 6$) $n : m = 30 : 1$ (при анализе слабых эффектов)	24
Табачник и Фиделл (Tabachnick and Fidell, 1989)	$n : m = 5 : 1$	25
Грин (Green, 1991)	$n \geq 50 + 8 \times m$ (для тестирования значимости модели в целом) $n \geq 104 + m$ (для тестирования значимости отдельных предикторов). - При совместном тестировании используется максимально жесткое правило из двух	26
Хейр, Андерсон и др. (1992)	$n : m = \text{от } 10 : 1 \text{ до } 15 : 1$	27
ВанВорхис и Морган (VanVoorhis & Morgan, 2007)	$n \geq 104 + m$, при этом наличие как минимум 30 наблюдений на фактор (т.е. $30 \times m$) позволяет лучше обнаружить слабые эффекты (ожидаемый R^2 равен 0,10 или меньше)	28
Оценочная литература		
Эпли (Epley D., 2004),	минимум 30 наблюдений всего	29
Appraisal Institute (2020)	Многие исследователи предполагают, что минимальное отношение должно быть в диапазоне от 10 до 15 наблюдений на независимую переменную, с отношением от 4 : 1 до 6 : 1 в качестве абсолютного минимума.	30
ДеЮиз (2022)	Для регрессионного анализа сопоставимых продаж обычно требуется от 10 до 15 продаж по каждой независимой переменной	31

²² Marks, M. R. (1966). Two kinds of regression weights that are better than betas in crossed samples. Paper presented at the meeting of the American Psychological Association. Цит. по Green S.B. (1991) How Many Subjects Does It Take To Do A Regression Analysis, Multivariate Behavioral Research, 26:3, <https://parsmodir.com/wp-content/uploads/2013/03/green1991.pdf>

²³ Schnidt, F. L. (1971). The relative efficiency of regression in simple unit predictor weights in applied differential psychology. Educational and Psychological Measurement, 31. Цит. по Green S.B. (1991) How Many Subjects ... - цит. соч.

²⁴ Harris, R. J. (1985). A primer of multivariate statistics (2nd ed.). Orlando, FL: Academic. Цит. по Van Voorhis C.R.W., Morgan B.L. (2007), Understanding Power and Rules of Thumb for Determining Sample Size, Tutorials in Quantitative Methods for Psychology 3(2), https://www.researchgate.net/publication/49619425_Understanding_Power_and_Rules_of_Thumb_for_Determining_Sample_Size

²⁵ Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (1989). Using multivariate statistics (2nd. ed.). Cambridge, MA: Harper & Row. Цит. по Green S.B. (1991) How Many Subjects ... - цит. соч.

²⁶ Green S.B. (1991) – цит. соч.

²⁷ Hair J.F., Anderson R.E. e.a. (1992), Multivariate Data Analysis with Readings, 3rd ed., New York: Macmillan, Цит. по Appraisal Institute (2020), The Appraisal of Real Estate, 15th Edition, Appendix B. Regression Analysis and Statistical Applications, https://www.appraisalinstitute.org/assets/1/7/ARE_15_Appendix_B.pdf

²⁸ Van Voorhis C.R.W., Morgan B.L. (2007), Understanding Power and Rules of Thumb ... - цит. соч.

²⁹ Epley D. (2004), Comments on «Evaluating the Valuers», Appraisal Journal, Jun 22, <https://www.thefreelibrary.com/Comments+on+%22Evaluating+the+Valuers%22.-a0120353045>

³⁰ Appraisal Institute (2020), The Appraisal of Real Estate, 15th Edition – цит. Соч.

³¹ DeWeese G.S. (2022), Land Valuation. Real Solutions to Complex Issues, The Appraisal Institute, Chicago, IL, Chapter 5. The Adjustment Process

Тримбл (2023)	Для регрессии (а также для парных продаж) требуется размер выборки, значительно превышающий количество предикторных (независимых) переменных, включенных в модель.	32
---------------	--	----

Обобщая данные, представленные в Табл. 3, можно заключить следующее.

1. Самым минимумом, с которого можно начинать использование регрессионного анализа, по критерию суммы является $n \geq 50 + m$, по критерию отношения $n = 5 \times m$ (Табачник и Фиделл). Очевидно, что если принять $m = 2 \dots 3$, то критерий суммы будет более существенно более жёстким, поскольку даст $n = 52 \dots 53$, против $n = 10 \dots 15$ по критерию отношения. Однако, в отношении критерия отношения возникает ещё одно ограничение, следующее из центральной предельной теоремы - $n > 15$. Таким образом, в данном случае следует признать неработоспособность критерия отношения на самом низком его пределе.
2. Если объединить данные Шмидта, Харриса, Хейра и Андерсона с соавт., Эпли, The Appraisal of Real Estate и ДеЮиза (см. Табл. X) - т.е. большинство приведённых данных - то получается, что на каждый фактор модели регрессионного анализа в оценке требуется минимум по 10 – 15 сопоставимых продаж. При $m = 2$ это даст $n = 20 \dots 30$, а при $m = 3$ $n = 30 \dots 45$, что уже совпадает с минимальным абсолютным критерием ($n > 30$, Эпли) и ближе к минимальному критерию суммы и не противоречит ограничению, накладываемому центральной предельной теоремой.

Вопрос о том, являются ли такие объёмы выборок типичными в индивидуальной, рыночной оценке, является риторическим, поскольку ответ на него очевидно отрицательный. Однако, в отдельных, нетипичных случаях такое возможно, а потому принципиальное использование регрессионного анализа в оценке автором не отрицается.

Особо отметим, что указанные значения априори предполагают наличие достаточно сильных (не слабых) корреляций модели в целом и частных корреляций по отдельным предикторам и категорически не гарантируют априорную статистическую значимость и достоверность результата оценки в конкретных ситуациях (при слабых корреляциях на уровне модели в целом и/или по отдельным факторам модели проверка формальным подходом может удостоверить отрицательный результат и выявить попытки манипулирования моделью), а только позволяют

1. оценщику - принять решение о целесообразности траты времени на регрессионный анализ до его начала, исходя из объёма имеющихся данных;
2. потребителю – не вдаваясь в детали анализа отчёта об оценке, принять решение о целесообразности траты времени на такой анализ.

С другой стороны, ориентация на максимально жёсткие эмпирические правила - $n \geq 200$ (Маркс); $n : m = 30 : 1$ (Харрис, ВанВорхис и Морган); $n \geq 104 + m$ (Грин, ВанВорхис и Морган) – с много большей вероятностью позволит обеспечить статистическую значимость как результата модели регрессионного анализа в целом, так и отдельных предикторов модели. Однако, это область объёмов выборок, которая и соответствует традиционному применению регрессионного анализа, в том числе – в массовой налоговой оценке, что не совпадает с реалиями индивидуальной, рыночной оценки.

³² Trimble M.C. (2023), Regression Promises and ... - цит. соч.

Слабые эффекты

Необходимо пояснить, что «слабые эффекты» в контексте оценки имеют существенно большее значение, чем в альтернативных областях.

Дело в том, что в случае оценки эффект влияния некоторого фактора (например, расположения помещения в подвале) в регрессионной модели может быть «слабым» не потому, что он оказывает «слабое» влияние на стоимость, а всего лишь потому, что он редко встречается в выборке (например, в трёх случаях в выборке из 60 объектов) и является статистически незначимым.

В результате, то реальное существенное влияние, которое оказывает этот фактор на стоимость, фактически размывается используемым аппаратом регрессии. В то же самое время более тщательное исследование именно по этому фактору методами пары групп или группы пар³³ такое реальное влияние выявят гарантированно.

В результате попытки определения величин корректировок для метода количественных корректировок сравнительного подхода на основании регрессионного анализа могут давать результаты, вводящие в заблуждение. Соответственно, к такого рода попыткам следует относиться с большой осторожностью.

Теорема о смещении агрегирования в регрессионном анализе

Эта теорема прямо следует из фундаментальной математико - экономической теоремы Зонненшайна – Мантеля – Дебре (теорема ЗМД)³⁴, но касается конкретного инструмента математической статистики – регрессионного анализа.

Необходимо также превентивно отметить, что теорема ЗМД в силу своего общего характера распространяется и на любые иные инструменты анализа больших данных, включая нейросети и методы искусственного интеллекта.

Одним из ключевых понятий массового статистического исследования / обследований является «уровень агрегирования информации». Теорема Зонненшайна – Мантеля – Дебрё постулирует два «глобальных» уровня агрегирования – макро- и микроуровень.

Однако, на практике таких уровней намного больше и их количество зависит от характера решаемой задачи.

В частности, Росстат в п. 3 «Основных методологических и организационных положений комплексного наблюдения условий жизни населения» для своих задач устанавливает 5 уровней агрегирования.

При этом различие в результатах, полученных на разных уровнях агрегирования, является полностью нормальным, имеющим очевидные объяснения. Подобное обстоятельство полностью распространяется и на такой инструмент математической статистики, как регрессионный анализ.

³³ Слуцкий А.А. (2024), Доказательственная оценка. Термины и инструменты ... - цит. соч.

³⁴ Подробнее о теореме ЗМД см. в Нейман Е.И., Слуцкий А.А., Бекишев Д.Ю. и др. (2024), Недопустимые источники информации в практике российской оценки в контексте требований п. 10 Федерального стандарта оценки «Процесс оценки» (ФСО III). Научно – методологический доклад, Межрегиональное Сообщество Экспертов и Оценщиков, 12.09.2024, <https://tmpo.su/e-i-nejman-a-a-sluckij-d-yu-bekishev-i-dr-nedopustimye-istochniki-informacii-v-praktike-rossijskoj-ocenki-v-kontekste-trebovanij-p-10-federalnogo-standarta-ocenki-process-ocenki-fso-iii-nau/>

Томас Гарретт из Департамента исследований Федерального резервного банка Сент – Луиса в своей статье ³⁵ доказывает теорему об ошибке (смещении) агрегирования при регрессионном анализе. При этом основные предпосылки и результаты Гарретта можно обобщить в следующих цитатах:

Использование агрегированных данных для объяснения индивидуального поведения предполагает вывод о том, что предполагаемая взаимосвязь между рассматриваемыми экономическими переменными однородна для всех индивидов.

Когда поведение экономических агентов неодинаково, регрессионный анализ с использованием агрегированных данных может дать заключение относительно экономических взаимосвязей, которые отличаются от выводов, сделанных с использованием менее агрегированных данных.

... предполагаемое влияние изменений объясняющей переменной на зависимую переменную в более агрегированной регрессии намного больше, чем в менее агрегированных регрессиях. ...

При выбранном критическом значении статистическая значимость коэффициента положительно связана с размером коэффициента и отрицательно - с его стандартной ошибкой.

Таким образом, вероятно, что коэффициенты из более агрегированной регрессии могут быть статистически значимыми, тогда как идентичные коэффициенты из менее агрегированных регрессий могут быть статистически незначимыми, и наоборот.

Это приводит к различным выводам относительно экономического поведения в зависимости от уровня агрегирования данных.

Подобное (со ссылкой на Гарретта) отмечает на практическом примере оценки промышленных земельных участков в Оклахоме Тримбл (Matthew C. Trimble) в ³⁶:

Фундаментальное предположение, лежащее в основе агрегированных данных, используемых при регрессионном моделировании, заключается в том, что моделируемая взаимосвязь между экономическими переменными является однородной для всех участников рынка.

Поскольку поведение экономических агентов на разных рынках недвижимости неодинаково, агрегирование данных по разным рынкам может привести к ошибочным результатам и некорректной регрессионной модели.

Искажающие результаты регрессии, вызванные смещением агрегирования при оценке недвижимости, могут быть устранены с помощью определения границ рынка и сегментации, которые гарантируют, что выбранные данные являются репрезентативными для рынка оцениваемого участка или участков.

... Никакое статистическое тестирование или продвинутая математика не помогут устранить нерепрезентативность данных.

... Увеличивая размер нерепрезентативной выборки, модель может еще больше отдалиться от того, что она призвана измерять, но, по иронии судьбы, быть защищенной увеличением "статистической значимости".

³⁵ Garrett T.A. (2003), Aggregated versus disaggregated data in regression analysis: implications for inference, Economics Letters, [https://www.sci-hub.ru/10.1016/s0165-1765\(03\)00149-6](https://www.sci-hub.ru/10.1016/s0165-1765(03)00149-6)

³⁶ Trimble M.C. (2023), Regression Promises and ... - цит. соч.

Такие модели иллюзорны, и оценочная индустрия должна скептически относиться к любым попыткам скрыть исходные данные и источник алгоритмических оценок за закрытым «черным ящиком».

На конкретном примере оценки Тримбл показывает, что в одном конкретном городе Оклахоме требуется тщательный анализ рынка и его кластеризация, поскольку механистическая максимизация количества наблюдений для регрессионного анализа приводит к попросту абсурдным результатам оценки за счёт смешивания «в одну кучу» объектов с различным ценообразованием (различным экономическим поведением полностью рациональных экономических субъектов), что является наглядным проявлением действия теоремы Зонненшайна – Мантеля – Дебрё.

Вследствие этого стоимость, полученная в процессе агрегирования на разных уровнях, будет разная, т.е. будет иметь место смещение (ошибка) агрегирования.

При этом очевидно, что достоверной будет стоимость, которая получена на минимально возможном практически уровне агрегирования, т.е. на минимально возможной географической области поиска объектов – аналогов.

Однако, с другой стороны, эта область должна быть достаточно обширной для того, чтобы обнаруженных объектов – аналогов было достаточно для оценки.

В совокупности эти два противонаправленных условия определяют критерий оптимизации географической области поиска объектов – аналогов для индивидуальной, рыночной оценки, которая именуется областью рынка объекта оценки.

Иначе дело обстоит в массовой оценке и, в частности, в регрессионном анализе: стремление к обеспечению статистической значимости предикторов со слабой корреляцией вынуждает исследователя расширять область поиска объектов для включения их в модель, что сопровождается появлением в модели новых предикторов, которые также должны быть статистически значимыми, а значит нужно ещё более расширять область поиска и т.д. В какой-то степени процесс уравнивается тем, что те предикторы, которые были значимыми на начальном этапе, перестают такими быть. Однако, это уже означает полный отрыв процесса оценки от принципов индивидуальной оценки и выход на более высокий уровень агрегирования, результаты которого получаются на нерепрезентативных для объекта оценки данных и могут не иметь вообще никакого отношения к той области рынка, в которой расположен объект оценки.

Эти эффекты и образуют в сумме непреодолимый барьер как на глобальном экономическом уровне – между микроэкономикой и макроэкономикой, так и на конкретном уровне оценки – между индивидуальной и массовой (см. Табл. 1).

Заключение

Подводя итоги, сформулируем требования к оценке регрессионным анализом на изучение которой стоит тратить время.

1. Модель не содержит свободного члена. При его наличии его следует складывать со средней случайной ошибкой модели и принимать решение с учётом полученной величины совокупной ошибки (рекомендуемый предел – не более 15% от величины оцененной стоимости).
2. Показано выполнение условий Гаусса – Маркова.
3. Показана проверка на нормальность остатков как модели в целом, так и по отдельным предикторам.

4. Количество объектов – аналогов, включённых в модель, превышает 10 – 15 на каждый предиктор (фактор) модели.
5. Показаны действия, которые были предприняты для минимизации области поиска объектов – аналогов.
6. Показана статистическая значимость как модели в целом, так и её отдельных предикторов.

При несоблюдении хотя бы одного из приведённых требований говорить о достоверном результате оценки проблематично. В этом случае требуется применение альтернативных методов оценки, которые, как показывает практика, есть всегда. Эти методы, могут либо подкрепить оценку регрессионным анализом, либо опровергнуть её.